CALCULO II
HOJA DE EJERCICIOS CAMPOS VECTORIALES

Universidad Europea Madrid
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

CAMPOS CONSERVATIVOS. FUNCIÓN POTENCIAL

1. Sea $\vec{F} = (4xy - 3x^2z^2, 2x^2, -2x^3z)$. Demuestre que $\int_c \vec{F}d\vec{l}$ es independiente de la trayectoria C.

2. Dado el campo vectorial $\vec{F} = (3x^2 + 2y - y^2e^x, 2x - 2ye^x)$. ¿Es posible afirmar que $\int_c \vec{F}d\vec{l}$ es nula si C está definida por $\vec{r}_{(t)}$que es una curva simple cerrada?
   Sol. Si

3. ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ el campo vectorial $\vec{F} = (axy - z^3; (a-2)x^2;\ (a-2)xz^2)$ es el gradiente de una función? Para esos valores, calcule la función potencial.
   Sol. a=4 $\boldsymbol{f(x;y;z) = 2x^2y - z^3x + k}$

4. ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ el campo vectorial $\vec{F} = (z; az^2 + 1;\ 10zy + x)$ es el gradiente de una función? Para esos valores, calcule la función potencial.

5. Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F} = (2xy; x^2 + z;\ y)$ al desplazar una partícula desde el origen de coordenadas hasta el punto (2; 0; 8), siguiendo cualquier trayectoria C que una dichos puntos.
   Sol. $\vec{F}$ es conservativo, su función potencial es $f(x;y;z) = x^2y + zy + k$, $W = 0$

6. Determine en los siguientes ejemplos cuándo el campo vectorial $\vec{F}$ es el gradiente de un campo escalar. En los casos en los que $\vec{F}$ sea conservativo, halle la correspondiente función potencial.
   a. $\vec{F} = (x; y)$
   b. $\vec{F} = (3x^2y;\ x^3)$
   c. $\vec{F} = (10xz^3 + 1; -6y^2; 15x^2z^2)$
   d. $\vec{F} = (2xy^3; x^2z^3; 3x^2yz^2)$
   Sol. a. $\vec{F}$ es conservativo $f(x;y;z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + k$ b. $\vec{F}$ es conservativo $f(x;y;z) = x^3y + k$ c. $\vec{F}$ es conservativo $f(x;y;z) = 5x^2z^3 + x - 2y^3 + k$ d. $\vec{F}$ no es conservativo

7. Demuestre que la integral de línea dada es independiente de la trayectoria y evalúe la integral $\int_c \vec{F}d\vec{l}$ donde $\vec{F} = (2x\sin(y), x^2\cos(y) - 3y^2)$ y C es cualquier trayectoria que va desde $(-1;0)$ a $(5;1)$
   Sol. $\vec{F}$ es conservativo por lo que la integral no depende de la trayectoria, $f(x;y) = x^2\sin(y) - y^3 + k$, valor de la integral $25\sin(1) - 1$

<u>CIRCULACIÓN DE CAMPO. TEOREMA STOKES</u>

9. Demuestre que la integral de línea dada es independiente de la trayectoria y evalúe la integral $\int_c \vec{F} d\vec{l}$ donde $\vec{F} = (6xy^2 - y^3, 6x^2y - 3xy^2)$ y C es cualquier trayectoria que va desde $(1; 2)$ a $(3; 4)$
   a. Utilizando la función potencial del campo vectorial
   b. Parametrizando el segmento que une el punto inicial y final

   Sol. a. 236

10. Dado el campo de fuerza $\vec{F} = (y^3 + 1, 3xy^2 + 1)$
    a. ¿Es $\vec{F}$ conservativo? Si es conservativo halle la función potencial.
    b. Halle el trabajo realizado para mover la partícula a lo largo de la circunferencia completa
    c. Halle el trabajo realizado para mover un partícula desde el punto (0; 0) al (2; 0) a lo largo de la semicircunferencia $(x-1)^2 + y^2 = 1$ con $y \geq 0$

    Sol. a. $\vec{F}$ es conservativo y $f(x; y; z) = y^3x + x + y + k$ b. 0 c. 2 J

11. Considere el campo de fuerzas $\vec{F} = (y; z;\ zy)$
    a. Determine si $\vec{F}$ es conservativo
    b. Calcule el trabajo realizado por $\vec{F}$ para desplazar una partícula a lo largo de la curva dada por la parametrización $\vec{r}_{(t)} = [\cos(t)\,; \sin(t)\,;\ e^t]; 0 \leq t \leq \pi$

    Sol. a. $\vec{F}$ no es conservativo b. $-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(1 + e^{\pi}) + \frac{1}{5}(e^{2\pi} + 1)$

12. Calcular la circulación del campo $\vec{F} = (3xy, 2x^2)$ sobre las curvas $C_1 \equiv \{y = x\}$ $C_2 \equiv \{y = x^2 - 2x\}$. **Sol: 27/4**

13. Calcular la circulación del campo $\vec{F} = (y, -x, yz)$ sobre la curva $C \equiv \{z = x^2 + y^2\ \cap z = 1\}$

14. Calcular la circulación del campo $\vec{F} = (x, y, z)$ sobre la curva $C \equiv \{z = x^2 + y^2\ \cap z = 4\}$

15. Probar el teorema de Stokes para el campo $\vec{F} = (x, y, z)$ y la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / R^2 = x^2 + y^2 + z^2; z \geq 0\}$

16. Calcula la circulación del campo $\vec{F} = (\ln(z), x, \sin(3y))$ sobre la curva $C \equiv \{9 = x^2 + y^2; z = 5\}$

17. Obtenga el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F} = (x^2 - y^2, 2xy)$ para mover una partícula desde

19. Utilice el teorema de Stokes para evaluar la integral de línea a lo largo de la curva orientada de marera positiva $\int_c \vec{F} d\vec{l}$ donde $\vec{F} = \left(xy + e^{x^2}, x^2 - \ln(1+y)\right)$ y C consiste del segmento de recta que va desde $(0; 0)$ a $(\pi; 0)$ y la curva $y = \sin(x)$ con $0 \leq x \leq \pi$
Sol. $\boldsymbol{\pi}$

20. Calcule $\int_c \vec{F} d\vec{l}$ donde $\vec{F} = (xy, x+y)$ y C es la frontera situada entre las gráficas de $x^2 + y^2 = 9$ y $x^2 + y^2 = 16$
Sol. $\boldsymbol{7\pi}$

21. Calcule $\int_c \vec{F} d\vec{l}$ donde $\vec{F} = (ye^{xy}, xe^{xy})$ y C es la curva formada por los siguientes segmentos de rectas: $Inicio\ (2;1) \rightarrow (1;2) \rightarrow (-1;2) \rightarrow (-2;1) \rightarrow (-2;\ -1) \rightarrow (-1;\ -2) \rightarrow (1;\ -2) \rightarrow (2;\ -1)\ Final$
Sol. $\boldsymbol{-e^2 + e^{-2}}$

22. Si $\vec{F} = k\frac{(x;y;z)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$ calcule el trabajo realizado por $\vec{F}$ al desplazar una partícula a lo largo del segmento de recta que va desde el punto (3;0;0) al punto (3;0;4). Evalúe sin utilizar una función potencial.
Sol. $\boldsymbol{\frac{2}{15}k\ [J]}$

23. Calcule el trabajo que realiza el campo $\vec{F} = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$ para trasladar una partícula desde el punto (-1;1) hasta el punto (1; 1) a lo largo de la parábola $y = x^2$
Sol. $\boldsymbol{-\frac{14}{15}}$

24. Calcule $\int_c \vec{F} d\vec{l}$ donde $\vec{F} = (x+2; 3z;\ y^2)$ y C es la curva intercepción de las superficies $1 = x^2 + y^2 + z^2$ y $z = x - 1$
Sol. $\boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}}{4}\pi}$

25. Calcule $\int_c \vec{F} d\vec{l}$ donde $\vec{F} = (x^2; 2y;\ x)$ a lo largo de la trayectoria cerrada por los arcos $\gamma_1; \gamma_2; \gamma_3$ dados por las ecuaciones:

$$\gamma_1 \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x = 0 \\ y \geq 0; z \geq 0 \end{cases} \qquad \gamma_2 \begin{cases} 2x + z = 1 \\ y = 0 \\ x \geq 0; z \geq 0 \end{cases} \qquad \gamma_1 \begin{cases} 4x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

Sol. $\boldsymbol{-\frac{1}{4} - \frac{\pi}{128}}$

28. Calcule la integral del campo vectorial $\vec{F} = (2a - y; x)$ a lo largo de la cicloide parametrizada por $\vec{r}_{(t)} = [a(t - \sin(t)\,; a(1 - \cos\,(t)]; 0 \leq t \leq 2\pi$
Sol. $-2\pi a^2$

29. Calcula la integral curvilínea del campo $\vec{F} = (yx^2; y)$ siendo la curva $y^2 + 2x^2 - 2Rx = 0$
Sol. $\vec{r}_{(t)} = \left[\frac{R}{2} + \frac{R}{2}\cos(t)\,; \frac{R}{\sqrt{2}}\sin\,(t)\right]; 0 \leq t \leq 2\pi; -\frac{5\pi R^4}{32\sqrt{2}}$

FLUJO DE CAMPO. TEOREMA DE GAUSS

30. Calcular el flujo de $\vec{F} = \left(2xy + x^2\ln(x)\,; 6y - y^2; -\left(x + 2xln(x)\right)z\right)$ a través de la superficie S formada por $S_1: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\ (-1 \leq z \leq 1) \cup S_2: 4x^2 + 9y^2 = 36z^2\ (-1 \leq z \leq 1)$
Sol. 48π

31. Aplicando el teorema de Gauss, calcule el flujo del campo $\vec{F} = \left(\frac{x^2y}{1+y^2} + 6yz^2\right)\vec{\imath} + 2xarctg(y)\vec{\jmath} - \frac{2xz(1+y)+1+y^2}{1+y^2}\vec{k}$ a través del lado exterior del segmento de la superficie $z = 1 - x^2 - y^2$ que se encuentra sobre el plano XY
Sol. π

32. Cerrando de un modo adecuado las superficies abiertas dadas y utilizando el teorema de Gauss, calcular los flujos de los campos vectoriales a través de las superficies indicadas (la normal a la superficies cerradas se toma exterior)
    a. $\vec{F} = (1 - 2x; y; z),\quad S:\quad x^2 + y^2 = z^2\ (0 \leq z \leq 4)$ **Sol.** $\frac{256}{3}\pi$
    b. $\vec{F} = (z^2; xz; y),\quad S:\quad x^2 + y^2 = 4 - z\ (0 \leq z)$ **Sol.** 8π
    c. $\vec{F} = (x^2 + y^2; -y^2; 2yz),\quad S: x^2 + z^2 = y^2\ (0 \leq y \leq 1)$ **Sol. 0**

33. Calcular $\iint(\vec{\nabla}\times\vec{F})d\vec{S}$, sabiendo que $\vec{F} = \left(e^{z^2}, 4z - y, 8xsin(y)\right)$ y $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$

34. Calcular el flujo de $\vec{F} = (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$ a través de la superficie compuesta por las superficies $S_1 \equiv x = a; S_2 \equiv y = a; S_3 \equiv x = 0; S_4 \equiv y = 0; S_5 \equiv z = 0$

35. Calcular el flujo del Campo $\vec{F} = (xyz, xyz, xyz)$ a través de la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 = z^2 - x^2 - y^2; z \in [0; 4]\}$

36. Calcular el flujo del Campo $\vec{F} = (x, y, z)$ a través de la superficie
$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 = z^2 - x^2 - y^2; z \in [0; 4]\}$

39. Probar el teorema de Gauss para el campo $\vec{F} = (x, y, z)$;
$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 25 = x^2 + y^2 + z^2; z \geq 0\}$

40. Probar el teorema de Gauss para el campo $\vec{F} = (xyz, xy, z)$;
$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 = z - x^2 - y^2; z \in [0; 3]\}$

41. Calcular el flujo de $\vec{F} = (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$ a través de la superficie
$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 25 = x^2 + y^2 + z^2; z \geq 0\}$

42. Calcular el flujo de $\vec{F} = (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$ a través de la superficie
$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 = z^2 - x^2 - y^2 +; z \geq 0 \ \cup 9 \geq x^2 + y^2; z = 3\}$

43. Probar el teorema de gauss para el campo $\vec{F} = (x, y, z)$: $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \right.$

$$\left. \begin{array}{ll} si\ 4 \leq z \leq 4 + \sqrt{2} & x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 2 \\ si\ 2 \leq z \leq 4 & x^2 + y^2 = 2 \\ si\ 0 \leq z \leq 2 & z - x^2 - y^2 = 0 \end{array} \right\}$$